

Γραμμική Άλγεβρα II.

$f(x)/g(x) \Leftrightarrow \text{υπάρχει } h(x) \in k[x] \text{ } g(x) = h(x)f(x).$

$f(x)$ διαιρεί $g(x)$.

$g(x)$ πολλαπλό του $f(x)$.

$q(x)$ ανώτερο αν η σχέση $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ αντιστρέφεται $f(x)$ σταθερό πολλαπλό η $g(x)$ βαθμ. πολλαπλό.

Παραδείγματα!

Ομογενισμένοι πολλαπλούς βαθμ. είναι είναι ανώτερο.

$$p(x) = 2x + 1$$

$$x - 7$$

$$3x - 5.$$

$$p(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\deg(p(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$$

$$'' \Rightarrow \deg(f(x)) = 1 \text{ ή } \deg(g(x)) = 0.$$

$$'' \Rightarrow \deg(f(x)) = 0 \text{ ή } \deg(g(x)) = 1.$$

$$(\hookrightarrow) g = \text{σταθ} \text{ ή } f = \text{σταθ}.$$

Το $x^2 + 1$ είναι ανώτερο στο $\mathbb{R}[x]$ αλλά δεν είναι ανώτερο στο $\mathbb{C}[x]$.

$$(x^2 + 1) = (x + i)(x - i).$$

Θεώρημα!

Κάθε μη σταθερό πολλαπλό $p(x) \in k[x]$ γραφεται ως γινόμενο
αυτών των πολλαπλών του $k[x]$ με "βαθμ. 1" ποιο. Ισχυριζόμενα
να υπάρχουν βαθμ. 1 πολλαπλά ανώτερα πολλαπλά $p_i(x) \in k[x]$ ή "βαθμ. 1"
εκεί που $p(x) = (p_1(x)p_2(x) \dots p_n(x))$. $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

$$2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5.$$

$$p(x) = c \cdot p_1(x) p_2(x) \dots p_n(x).$$

↑
αυτών των
πολλών

Θεώρημα: Έστω $f(x), g(x) \in K[x]$ με $f(x) \neq 0$, τότε υπάρχει μονόμιο $n(x)$ και $u(x) \in K[x]$ τέτοια ώστε:

$$g(x) = n(x)f(x) + u(x) \quad \text{με} \quad u(x) = 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 Διαίρετος π λίκο μ νοδινόμο

$$\deg(u(x)) < \deg(f(x))$$

Παράδειγμα: $f(x) = x^2 - x + 1$
 $g(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x + 2$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x + 2 & x^3 - x + 1 \\ - 2x^4 - 2x^2 + 2x & 2x - 3 \\ \hline x^2 + 3x - 2 & \end{array}$$

$$g(x) = \boxed{0} f(x) + \boxed{x^2 - x + 1}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 π λίκο μ νοδινόμο

Ορισμός: Έστω $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in K[x]$ και $a \in K$, το $f(a) = a_0 + a_1a + \dots + a_na^n$ ονομάζεται τιμή του πολυωνύμου f στο a .

Ορισμός: Ένα στοιχείο $p \in K$ λέγεται ρίζα του $f(x) \in K[x]$ αν $f(p) = 0$.

Πρόταση: Έστω $f(x) \in K[x]$. Το $p \in K$ είναι ρίζα του $f(x)$ αν-ν το $x-p$ διαιρεί το $f(x)$.

→ Το p είναι ρίζα του $f(x) \Rightarrow f(p) = 0$

$$x-p \neq 0 \Rightarrow f(x) = n(x)(x-p) + u(x) \quad \text{με} \quad u(x) = 0$$

$$\deg(u(x)) < \deg(x-p)$$

$$u(x)=0 \quad \text{ή} \quad \deg(u(x)) < \deg(x-p) = 1$$

$$\deg(u(x)) = 0 \Rightarrow u(x) = c, \text{ σταθερό πολυώνυμο}$$

$$f(x) = n(x)(x-p) + c$$

$$\text{π.ρ. } p = f(p) = n(p)(\cancel{p-p}) + c = c$$

$$c=0 \text{ άμεσα αφού } \deg c = 0$$

$$\text{άρα } \Rightarrow u(x) = 0$$

$$f(x) = n(x)(x-p)$$

$$(x-p) \cdot f(x)$$

($\Leftarrow$) $(x-p)$ διαιρεί το $f(x) \Rightarrow$ υπάρχει $h(x) \in K[x]$

$$\text{τότε ώστε } f(x) = h(x)(x-p)$$

$$f(p) = h(p)(p-p) = 0 \text{ άρα } p \text{ είναι π.ρ.}$$

Ορισμός: Έστω $f(x) = (x-p)g(x)$ με $g(p) \neq 0$, τότε το V λέγεται πολύπλοκος της ρίζας p .

Πρόταση: Έστω $\phi(x) \in K[x]$ ένα μη μηδενικό πολυώνυμο. Το $\phi(x)$ έχει το πολύ $\deg(\phi(x))$ ρίζες στο K , όπου κάθε ρίζα προσμετράται με φορές όσες η πολλαπλότητα της.

$$\phi(x) = (x-p)h(x)$$

$$\deg(\phi(x)) = \deg((x-p) \cdot h(x)) = \deg((x-p) \cdot h(x))$$

Θεμελιώδεις Θεώρημα Άλγεβρας

Έστω $\phi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$ μη σταθερό πολυώνυμο τότε το $\phi(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Πρόταση: Έστω $\phi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$ μη σταθερό πολυώνυμο με $a_n \neq 0$ τότε $\phi(x) = a_n(x-z_1)^{\lambda_1}(x-z_2)^{\lambda_2}\dots(x-z_k)^{\lambda_k}$
 $z_i \in \mathbb{C}$ με $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n = \deg \phi(x)$

$\rightarrow$ Όλα τα αυτά πολυώνυμα πάνω από το $\mathbb{C}$ είναι βαθμωτά ένα.

$\rightarrow$ Μονικά αυτά $x-p$ $p \in \mathbb{C}$

Πρόταση: Έστω $\phi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in K[x]$ ($a_i \in \mathbb{R}$)
 Αν z είναι μια μιγαδική ρίζα του πολυώνυμου $\phi(x)$ τότε και
 $\bar{z}$ είναι ρίζα του $\phi(x)$.

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

Απόδειξη:

$$\phi(z) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n = 0$$

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{z} + \bar{a}_2\bar{z}^2 + \dots + \bar{a}_n\bar{z}^n = \bar{0} = 0$$

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{z} + \bar{a}_2\bar{z}^2 + \dots + \bar{a}_n(\bar{z})^n = 0$$

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{z} + \bar{a}_2\bar{z}_2 + \dots + \bar{a}_n(\bar{z})^n = 0$$

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{z} + \bar{a}_2\bar{z}_2 + \dots + \bar{a}_n(\bar{z})^n = 0 \Rightarrow \phi(\bar{z}) = 0$$

Πρόταση: Κάθε πολυώνυμο $\phi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ περιττού
 βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα

Πρόταση: Τα αϊσόμετρα πολυώνυμα του $\mathbb{R}[x]$ είναι τα πολυώνυμα
 βαθμού ένα είναι και τα πολυώνυμα βαθμού 2 της μορφής
 $ax^2 + bx + c$ με $b^2 - 4ac < 0$ $f(x) = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$
 $h(x) = x^2 - (z_1 + \bar{z}_1)x + z_1\bar{z}_1$ $h(x)$

Θεώρημα: Έστω $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ και $p = \frac{k}{\lambda} \in \mathbb{Q}$
 ρίζα του $f(x)$ με $k, \lambda \in \mathbb{Z}$ και μ.κ.λ. $(k, \lambda) = 1$, τότε k/a_0
 και λ/a_n .

Πόρισμα: Έστω $f(x) = a_0 + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ με $a_n = \pm 1$, τότε
 αν $p \in \mathbb{Q}$ είναι ρίζα του $f(x)$ το $p \in \mathbb{Z}$ και p/a_0 .